УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

ИЕРАРХИИ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ТОЧНОСТЬЮ ДО НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ

Даны иерархии гладких многообразий в виде последовательностей. Последовательность нулевого порядка состоит из параллелизуемого многообразия, группы Ли и абелевой группы Ли. Каждая из трех последовательностей 1-го порядка для голономных, полуголономных и неголономных гладких многообразий включает базу параллелизуемого расслоения линейных кореперов, иначе говоря, базу пространства расширенной аффинной связности, базу пространства аффинной связности без кручения и аффинное пространство.

Hierarchies of smooth manifolds in the form of sequences are given. The sequence of zero order consists of the parallelized manifold, Lie group and Abelian group of Lie. Each of three sequences of the 1st order for the holonomic, semi-holonomic and the non- holonomic smooth manifolds includes base of the parallelized bundle of linear coframes, in other words, base of space of expanded affine connection, base of space of affine connection torsion-free and affine space.

Ключевые слова: гладкое многообразие, параллелизуемое многообразие, голономность, полуголономность, неголономность, аффинная связность.

Key words: smooth manifold, parallelized manifold, holonomicity, semi-holonomicity and non- holonomicity, affine connection.

1. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M_n. Г. Ф Лаптев [1] показал, что в окрестности текущей точки x многообразия M_n можно ввести совокупность n линейно независимых дифференциальных форм Пфаффа

$$\omega^i \quad (i, \ldots = \overline{1, n}),$$

причем первые интегралы u^i вполне интегрируемой системы уравнений $\omega^i = 0$ являются локальными координатами точки $x(u^i) \in M_n$. Условие полной интегрируемости системы $\omega^i = 0$ имеет вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{1}$$

где ω^i_j — линейные формы, не являющиеся, вообще говоря, линейными комбинациями базисных форм ω^i.

Для продолжения структурных уравнений (1) продифференцируем их внешним образом:

$$(d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i) \wedge \omega^k = 0 .$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева [1]:

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i , \qquad (2)$$

причем линейные формы ω_{jk}^i удовлетворяют условиям

$$\omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{jk}]} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \omega^{\mathrm{i}}_{[j\mathrm{k}]} = \lambda^i_{jkl}\omega^l,\; \lambda^i_{(jk)l} = 0,\; \lambda^i_{\{jkl\}} = 0, \qquad (3)$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

2. Пусть формы ω_j^i — линейные комбинации базисных форм ω^k:

$$\omega_j^i = \mu_{jk}^i \omega^k , \qquad (4)$$

где μ_{jk}^i — некоторые функции. Продифференцируем уравнения (4) с помощью структурных уравнений (1), (2):

$$(d\mu_{jk}^i - \mu_{jl}^i \omega_k^l + \mu_{jl}^l \omega_l^i + \omega_{jk}^i) \wedge \omega^k = 0 .$$

Разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана

$$d\mu_{jk}^i - \mu_{jl}^i \omega_k^l + \mu_{jl}^l \omega_l^i + \omega_{jk}^i = \mu_{jkl}^i \omega^l \;\; (\mu_{j[kl]}^i = 0).$$

Используем уравнения (4):

$$d\mu_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \hat{\mu}_{jkl}^i \omega^l , \quad \hat{\mu}_{jkl}^i = \mu_{jkl}^i + \mu_{jm}^i \mu_{kl}^m - \mu_{jk}^m \mu_{ml}^i . \qquad (5)$$

Проальтернируем дифференциальные уравнения (5_1) по нижним индексам и воспользуемся выражениями (3_1):

$$dC_{jk}^i = C_{jkl}^i \omega^l , \;\; C_{jk}^i = \mu_{[jk]}^i, \;\; C_{jkl}^i = \hat{\mu}_{[jk]l}^i - \lambda_{jkl}^i . \qquad (6)$$

Дифференциальные уравнения (6_1) показывают, что C_{jk}^i — абсолютные инварианты.

Если существенно используются только структурные уравнения (1) многообразия M_n, то будем говорить о многообразии M_n^0, рассматриваемом с точностью до нулевого порядка. В случае выполнения условия (4), которое назовем *условием замкнутости нулевого порядка*, уравнения (1) примут вид

$$d\omega^i = C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k . \qquad (7)$$

Тогда многообразие M_n^0 станет параллелизуемым многообразием, которое обозначим M_n^P. Продифференцируем структурные уравнения (7) и получим

$$(dC^i_{jk} - C^i_{lk}\omega^l_j - C^i_{jl}\omega^l_k) \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 .$$

Используем уравнения (4), (6_1):

$$(C^i_{jkl} - C^i_{mk}C^m_{jl} - C^i_{jm}C^m_{kl})\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0 ,$$

откуда следует

$$C^i_{[jkl]} - C^i_{m[k}C^m_{jl]} - C^i_{[j|m|}C^m_{kl]} = 0 .$$

Поскольку в каждых квадратных скобках есть пара рядом стоящих индексов, по которым имеется антисимметрия, альтернирование преобразуется в циклирование

$$C^i_{\{jkl\}} - C^i_{m\{k}C^m_{jl\}} - C^i_{\{j|m|}C^m_{kl\}} = 0 .$$

Воспользуемся антисимметрией инвариантов C^i_{jk} по нижним индексам

$$C^i_{\{jkl\}} + C^i_{m\{k}C^m_{lj\}} + C^i_{m\{j}C^m_{kl\}} = 0 .$$

Приведем подобные члены:

$$C^i_{\{jkl\}} + 2C^i_{m\{j}C^m_{kl\}} = 0 . \qquad (8)$$

Утверждение 1. *Абсолютные инварианты C^i_{jk}, входящие в структурные уравнения* (7) *параллелизуемого многообразия M_n^P, и их пфаффовы производные C^i_{jkl} подчиняются* [2, с. 31] *обобщенным тождествам Якоби* (8).

Продолжим дифференциальные уравнения (6_1):

$$dC^i_{jkl} \cong 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^m) ,$$

то есть пфаффовы производные C^i_{jkl} абсолютных инвариантов C^i_{jk} также являются абсолютными инвариантами, поэтому инвариантны равенства $C^i_{jkl} = 0$. Тогда дифференциальные уравнения (6_1) примут вид

$$dC^i_{jk} = 0 .$$

Параллелизуемое многообразие M_n^P превратится в группу Ли G_n со структурными уравнениями (7), в которых $C^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \mathrm{const}$. Из обобщенных тождеств Якоби (8) получим тождества Якоби

$$C^i_{m\{j}C^m_{kl\}} = 0 .$$

Наконец, если постоянные обратятся в нуль $C^i_{jk}=0$, то группа Ли станет абелевой группой $\hat{G}_n$.

Упомянутые классы гладких многообразий M^0_n, рассматриваемые локально с точностью до нулевого порядка, описываются иерархической схемой

$$M^0_n \to M^P_n \to G_n \to \hat{G}_n,$$

где стрелка означает, что каждое следующее многообразие — особый случай предыдущего.

3. В общем случае условие замкнутости (4) не выполняется, поэтому при фиксации точки $x \in M_n$ структурные уравнения (2) дают

$$d\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k \quad (\pi = \omega|_{\omega^i=0}). \tag{9}$$

Это структурные уравнения линейной группы $GL(n)$, $\dim GL(n) = n^2$, поэтому обозначим ее L_{n^2}. Она называется также *дифференциальной группой 1-го порядка* D^1_n [1].

Утверждение 2. *Над гладким многообразием* M_n, *не являющимся параллелизуемым многообразием* M^P_n, *имеется главное расслоение линейных кореперов* $L_{n^2}(M_n)$ *со структурными уравнениями* (1), (2), *типовым слоем которого является линейная группа* L_{n^2}, *эффективно действующая в n-мерном линейном пространстве* T_n, *касательном к многообразию* M_n *в точке x.*

Утверждение 3. *Если многообразие* M_n *станет параллелизуемым многообразием* M^P_n, *в частности группой Ли* G_n, *то расслоение* $L_{n^2}(M_n)$ *вырождается.*

4. Продолжая структурные уравнения (2), получим

$$D\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \tag{10}$$

$$\omega^i_{j[kl]} = \lambda^i_{jklm}\omega^m, \ \lambda^i_{j(kl)m} = 0, \ \lambda^i_{j\{klm\}} = 0. \tag{11}$$

Пусть трехиндексные формы ω^i_{jk} — линейные комбинации базисных форм ω^l и слоевых форм 1-го порядка ω^l_m:

$$\omega^i_{jk} = \nu^i_{jkl}\omega^l + \nu^{im}_{jkl}\omega^l_m. \tag{12}$$

Продолжим эти условия замкнутости 1-го порядка

$$d\nu^i_{jkl} + \omega^i_{jkl} \simeq 0, \ d\nu^{im}_{jkl} \simeq 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^l, \omega^l_m). \tag{13}$$

Проальтернируем уравнения (12) по нижним индексам

$$\omega^i_{[jk]} = \nu^i_{[jk]l}\omega^l + \nu^{im}_{[jk]l}\omega^l_m,$$

что в сопоставлении с выражениями (11_1) дает

$$\nu^i_{[jk]l} = \lambda^i_{jkl}, \ \ \nu^{im}_{[jk]l} = 0. \qquad (14)$$

Возможность последних равенств вытекает из дифференциальных сравнений (13_2), показывающих, что ν^{im}_{jkl} — абсолютные инварианты на расслоении $L_{n^2}(M_n)$.

Внесем выражения (12) в структурные уравнения (2):

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + \nu^{im}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l_m, \quad R^i_{jkl} = \nu^i_{j[kl]}. \qquad (15)$$

Расслоение кореперов 1-го порядка $L_{n^2}(M_n)$ стало параллелизуемым многообразием, базу которого обозначим $M^{P_1}_n$. Иначе говоря, получили структурные уравнения (1), (15_1) пространства расширенной аффинной связности без кручения [3].

Замечание. При выполнении условия замкнутости 1-го порядка (12) не предполагается выполнение условия замкнутости нулевого порядка (4), при котором расслоение $L_{n^2}(M_n)$ вырождается, поэтому многообразие $M^{P_1}_n$ не является параллелизуемым многообразием M^P_n.

Альтернируя дифференциальные сравнения (13_1) по индексам k, l и учитывая выражения (11_1), (15_2), получим $dR^i_{jkl} \approxeq 0$, что вместе с дифференциальными сравнениями (13_2) дает

Утверждение 4. *Компоненты объекта кривизны* $\{R^i_{jkl}, \nu^{im}_{jkl}\}$ *расширенной аффинной связности являются абсолютными инвариантами на параллелизуемом расслоении* $L_{n^2}(M^{P_1}_n)$.

Если $\nu^{im}_{jkl} = 0$, то уравнения (15_1) примут вид

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l. \qquad (16)$$

Получили структурные уравнения (1), (16) пространства аффинной связности без кручения $L_{n^2,n}$, которое часто обозначается $A_{n,n}$. Абсолютные инварианты R^i_{jkl} на пространстве аффинной связности $L_{n^2,n}$ образуют тензор кривизны этого пространства на базе $M^{A_1}_n$ пространства $L_{n^2,n}$.

При аннулировании тензора кривизны R^i_{jkl} уравнения (16) упрощаются:

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \qquad (17)$$

В этом случае пространство аффинной связности $L_{n^2,n}$ вырождается в аффинную группу $GA(n)$ со структурными уравнениями (1), (17), причем база $M_n^{A_1}$ становится аффинным пространством A_n.

5. В общем случае условия замкнутости нулевого и первого порядков (4), (12) не выполняются, поэтому при фиксации точки $x \in M_n$ уравнения (10) принимают вид

$$D\pi^i_{jk} = \pi^l_{jk} \wedge \pi^i_l - \pi^i_{lk} \wedge \pi^l_j - \pi^i_{jl} \wedge \pi^l_k . \tag{18}$$

Итак, получили структурные уравнения (9), (18) дифференциальной группы 2-го порядка D_n^2 [1], причем условие ($З_1$) дает $\pi^i_{[jk]} = 0$, следовательно, $\dim D_n^2 = \frac{1}{2} n^2 (n+3)$. Группа $D_n^2 = GL^2(n) = L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}$ имеет фактор-группу D_n^1.

Утверждение 5. *Над гладким многообразием M_n, не являющимся базой $M_n^{P_1}$ параллелизуемого расслоения касательных кореперов 1-го порядка $L_{n^2}(M_n^{P_1})$, существует главное расслоение соприкасающихся кореперов 2-го порядка $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$ со структурными уравнениями* (1), (2), (10), *типовым слоем которого является дифференциальная группа 2-го порядка $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}$, имеющая фактор-группу L_{n^2} и эффективно действующая в соприкасающемся пространстве $T_{\frac{1}{2}n(n+3)} \supset T_n$.*

6. Характеризуя многообразие M_n только с помощью структурных уравнений (1), (2), будем говорить о многообразии M_n^1, рассматриваемом с точностью до 1-го порядка. Если в условии локальной симметрии ($З_1$) для форм ω^i_{jk} имеем $\lambda^i_{jkl} \neq 0$, то есть формы ω^i_{jk} не являются симметричными:

$$\omega^i_{[jk]} \neq 0 ,$$

то назовем M_n^1 *полуголономным гладким многообразием 1-го порядка* $M_n^{S_1}$.

В особом случае, когда

$$\lambda^i_{jkl} = 0 \Leftrightarrow \omega^i_{[jk]} = 0 ,$$

но $\omega^i_{jk} \neq 0$, то есть ненулевые формы ω^i_{jk} симметричны, назовем M_n^1 *голономным гладким многообразием 1-го порядка* $M_n^{H_1}$.

В особенном случае, когда

$$\omega^i_{jk} = 0 ,$$

назовем M_n^1 *тривиальным гладким многообразием* $M_n^{T_1}$, причем $M_n^{T_1} = A_n$.

Более того, если условия (3_1) не выполняются, то есть структурные уравнения (2) получены не в результате продолжения структурных уравнений (1), то будем говорить о неголономном гладком многообразии 1-го порядка $M_n^{N_1}$ [3]. Это произойдет, например, при невыполнении условий (14).

Классы гладких многообразий M_n^1 (см.: [4]), рассмотренные локально с точностью до 1-го порядка, образуют следующую иерархию:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & M_n^{N_1} & \to & \widetilde{M}_n^{P_1} & \to & \widetilde{M}_n^{A_1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
 & & M_n^{S_1} & \to & M_n^{P_1} & \to & M_n^{A_1} & \to & A_n\,, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\
A_n & \leftarrow & M_n^{H_1} & \to & \hat{M}_n^{P_1} & \to & \hat{M}_n^{A_1} & &
\end{array}
$$

где значки ~ и $\wedge$ отмечают базы пространств расширенной и обычной аффинных связностей в неголономном и голономном случаях.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.
2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
3. *Шевченко Ю. И.* Расширенная аффинная связность на гладком многообразии // Геометрия многообразий и ее приложения. Улан-Удэ, 2014. С. 36—43.
4. *Скрыдлова Е. В., Шевченко Ю. И.* Классификация гладких многообразий по степени неголономности // Актуальные вопр. геом. и ее приложения. Ташкент, 2014. С. 205—208.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: EScrydlova@kantiana.ru

About the author

Dr Yuri Shevchenko – Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: EScrydlova@kantiana.ru